Exercice 01

12 Équation de la trajectoire

Un projectile lancé depuis le sol dans un champ de pesanteur uniforme a pour équations horaires dans un repère orthonormé (O ; x, y, z) :

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \times t,\ \ y(t) = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 \sin \alpha \times t \ \text{ et } \ z(t) = 0$$

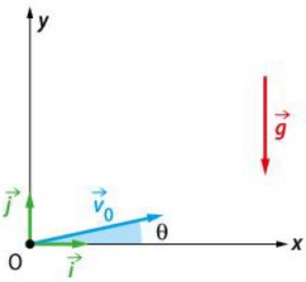
Données : *$v_0 = 10{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; angle $\alpha = 60°$*

1. Établir l'équation de sa trajectoire.
2. Représenter la situation sur un schéma et tracer l'allure de sa trajectoire $y = f(x)$.
3. La flèche y_{max} correspond à l'altitude maximale atteinte par le projectile.
Montrer que $y_{max} = \dfrac{v_0^2 \times \sin^2 \alpha}{2\, g_0}$. Calculer y_{max}.
4. Exprimer puis calculer la valeur de la portée du tir x_{max} qui correspond à la distance mesurée horizontalement entre le point de lancement et le point d'impact.

Exercice 02

10 Cas d'un lancer oblique

Lors d'un swing, un joueur de golf professionnel peut envoyer la balle parfois jusqu'à 250 mètres. Cette distance, appelée « portée », est la distance parcourue mesurée horizontalement par rapport à l'impact initial entre le club et la balle de golf.



Une balle de golf de centre de masse G et d'une masse de 46 g est lancée au niveau du sol avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle θ par rapport à l'horizontale.

Sa trajectoire est étudiée dans un repère (O ; x, y, z) dont l'origine correspond au point de départ de la balle.

Données : *angle $\theta = 11{,}0°$, $v_0 = 75{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$*

1. Établir les équations horaires du mouvement.
2. Montrer que le mouvement est plan.
3. Montrer que la portée de la balle s'écrit :
$$x_{max} = \frac{2\, v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g}.$$
4. Calculer puis comparer cette valeur à la valeur annoncée.

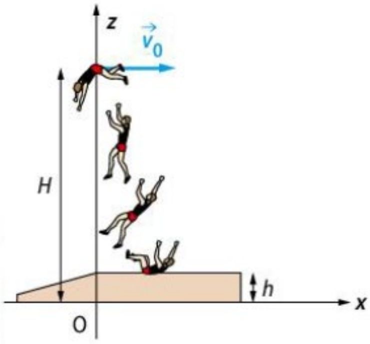
Exercice 03

11 Atterrissage d'une perchiste

On souhaite étudier la phase descendante d'une athlète lors de l'épreuve du saut à la perche.

On considère le système perchiste que l'on assimile à un point matériel.

On négligera dans cette phase toute action de l'air. La barre est franchie avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ horizontal.



On se place dans le repère (O ; x, y, z) en prenant le début de la phase descendante comme origine des temps ($t = 0$ s).

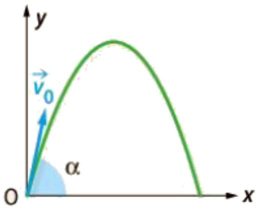
Données : *hauteur du tapis de réception $h = 0{,}70$ m ; hauteur du saut $H = 4{,}5$ m*

1. Montrer que les composantes du vecteur accélération du système sont :
$$a_x(t) = a_y(t) = 0 \text{ et } a_z(t) = -\,g_0.$$
2. Montrer que les équations horaires du mouvement du perchiste s'écrivent :
$$x(t) = v_0 \times t,\ y(t) = 0 \ \text{ et } \ z(t) = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + H.$$
3. Montrer que le mouvement est plan.
4. Quelle est la durée de la phase descendante ?

Exercice 04

20 Mouvement d'un ballon

Au rugby, une « chandelle » désigne un coup de pied permettant d'envoyer le ballon en hauteur par-dessus la ligne de défense adverse. L'auteur de cette action frappe le ballon à $t = 0$ s au point O du repère ci-contre. Il doit ensuite se déplacer afin de récupérer le ballon derrière le rideau défensif.



Trajectoire au cours d'une chandelle

Données : *À l'instant $t = 0$ s, le vecteur vitesse du ballon fait un angle α égal à 60° avec l'axe Ox et sa valeur est $v_0 = 10{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.*

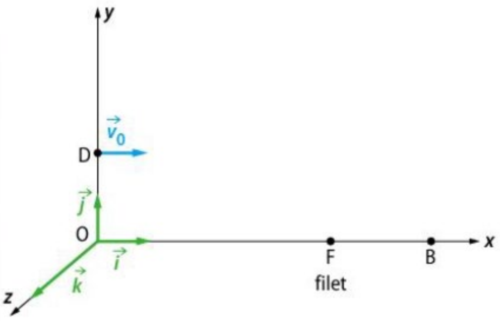
1. Établir les équations horaires du mouvement du ballon.
2. Montrer que l'équation de la trajectoire du point M est :

$$y(x) = \frac{-g_0}{2 \times v_0^2 \times \cos^2 \alpha} \times x^2 + x \times \tan \alpha.$$

3. Déterminer par le calcul le temps dont dispose le joueur pour récupérer le ballon avant que celui-ci ne touche le sol.

Exercice 05

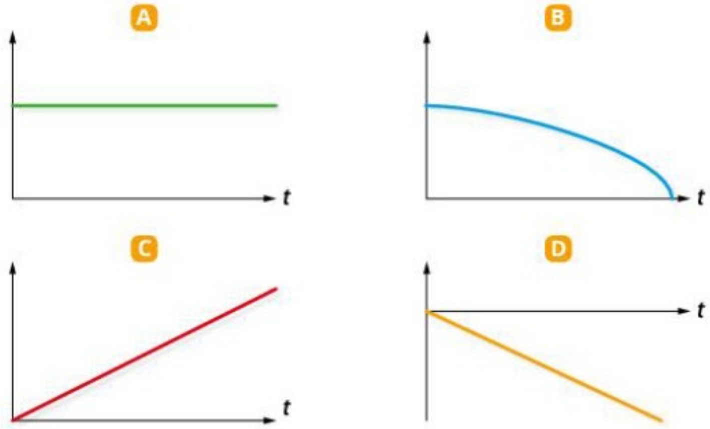
26 Qualité du service au tennis



Au service, un joueur de tennis souhaite que la balle frappe le sol en B tel que $OB = L = 18{,}7$ m. Pour cela, il lance la balle verticalement et la frappe avec sa raquette en un point D situé sur la verticale de O à la hauteur H. La balle part alors de D avec une vitesse horizontale de valeur $v_0 = 126\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. La balle sera considérée comme ponctuelle et on négligera l'action de l'air.

Données : *$m = 58{,}0$ g ; $OD = H = 2{,}20$ m ; $OF = 12{,}2$ m ; $g_0 = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$*

1. Dans le repère (O ; x, y, z), établir l'expression du vecteur accélération de la balle au cours du mouvement.
2. a. Établir les équations horaires $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la balle.
b. Attribuer chacune des équations horaires précédentes à l'un des quatre graphes suivants :



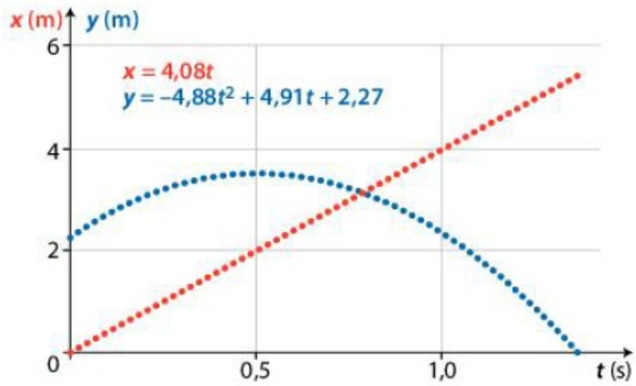
3. a. Établir l'équation de la trajectoire de la balle.
b. La balle, supposée ponctuelle, passe-t-elle au-dessus du filet de hauteur 92,0 cm ?
c. Pour être valide, la balle de service doit retomber entre le filet et B. Le service est-il valide ?
4. a. Déterminer le travail du poids de la balle entre l'instant de la frappe et celui de l'impact au sol.
b. En déduire la vitesse de la balle lorsqu'elle frappe le sol.
c. Pourquoi faut-il frapper la balle bien haut lors du service ?

Exercice 06

16 Établir l'équation de la trajectoire

CORRIGÉ | Effectuer des calculs.

Le graphique ci-dessous représente l'abscisse x et l'ordonnée y du centre de masse G d'une balle au cours du temps. Les équations horaires sont précisées sur le graphique.



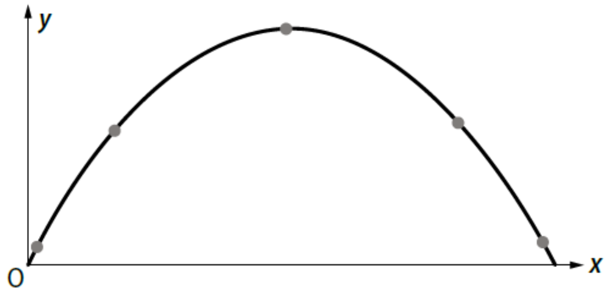
- Établir l'équation cartésienne de la trajectoire de G.

Exercice 01

12 **1.** $x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$, d'où $t = \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$ et, en reportant t dans $y(t)$, on obtient :

$$y(x) = \frac{-g_0}{2\,v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 + x \cdot \tan\alpha$$

2.



3. La flèche est atteinte à l'instant t_s tel que $v_y(t_s) = 0$, soit :

$v_y(t_s) = -g_0 \cdot t_s + v_0 \cdot \sin\alpha = 0$, soit $t_s = \dfrac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g_0}$.

D'où :

$$y_{max} = y(t_s) = -\frac{g_0}{2} \cdot t_s^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_s$$
$$= -\frac{g_0}{2}\left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g_0}\right)^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g_0}$$
$$= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g_0}$$

Soit $y_{max} = \dfrac{10{,}0^2 \times \sin^2(60°)}{2 \times 9{,}81} = 3{,}8$ m.

4. La portée est obtenue à l'instant t_p tel que $y(t_p) = 0$ m soit pour :

$y(t_p) = -\dfrac{1}{2} g_0 \cdot t_p^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_p = 0$, d'où :

$$t_p = \frac{2v_0 \cdot \sin\alpha}{g_0}$$

La portée vaut :

$$x_{max} = x(t_p) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_p = \frac{2v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g_0}$$

Soit :

$$x_{max} = \frac{2 \times 10{,}0^2 \times \sin 60° \times \cos 60°}{9{,}81} = 8{,}8 \text{ m.}$$

Exercice 02

10 **1.** On néglige l'action de l'air sur la balle. D'après la deuxième loi de Newton :

$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g_0}$, d'où $\vec{a} = \vec{g_0}$. Dans le repère orthonormé (O ; x, y, z), puisque $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, on a :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = a_y = -g_0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = a_z = 0 \end{cases}$$

Par intégration, on en déduit un ensemble de primitives possibles : $\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = -g_0 \cdot t + k_2 \\ v_z(t) = k_3 \end{cases}$ où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes.

La connaissance de la vitesse initiale (à t = 0 s) permet d'établir les valeurs de chacune des deux constantes par identification de deux termes égaux :

$\overrightarrow{v(0)} = \vec{v_0}$, d'où :

$$\begin{cases} v_x(0) = k_1 = v_0 \cdot \cos\theta \\ v_y(0) = -g_0 \times 0 + k_2 = v_0 \cdot \sin\theta \\ v_z(0) = k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \\ v_y(t) = -g_0 \cdot t + v_0 \cdot \sin\theta \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

De même, puisque $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, après intégration et en connaissant la position initiale O à t = 0 s, les équations horaires de la position s'écrivent :

$$\overrightarrow{OG(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\theta \cdot t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

2. $z(t)$ = 0, donc le mouvement s'effectue dans le plan (xOy).

3. La portée est obtenue à l'instant t_p tel que $y(t_p) = 0$ m, soit pour :

$$y(t_p) = -\frac{1}{2} g_0 \cdot t_p^2 + v_0 \cdot \sin\theta \cdot t_p = 0$$

D'où $t_p = \dfrac{2v_0 \cdot \sin\theta}{g_0}$ et la portée vaut :

$$x_{max} = x(t_p) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_p = \frac{2v_0^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{g_0}$$

4. $x_{max} = \dfrac{2 \times 75{,}0^2 \times \sin 11° \times \cos 11°}{9{,}81} = 215$ m, ce qui est bien inférieur à la valeur limite annoncée.

Exercice 03

11 **1.** On néglige l'action de l'air sur le système. D'après la deuxième loi de Newton, $m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g_0}$, d'où $\vec{a} = \vec{g_0}$. Dans le repère orthonormé (O ; x, y, z), puisque $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, on a :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = a_y = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = a_z = -g_0 \end{cases}$$

2. Par intégration, on en déduit un ensemble de primitives possibles :

$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = k_2 \\ v_z(t) = -g_0 \cdot t + k_3 \end{cases}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes.

La connaissance de la vitesse initiale (à $t = 0$ s) permet d'établir les valeurs de chacune des deux constantes par identification de deux termes égaux : $\overrightarrow{v(0)} = \vec{v_0}$, d'où :

$$\begin{cases} v_x(0) = k_1 = v_0 \\ v_y(0) = k_2 = 0 \\ v_z(0) = -g_0 \times 0 + k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{soit } \overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -g_0 \cdot t \end{cases}$$

De même, puisque $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, après intégration, les équations horaires de la position s'écrivent :

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t + k_4 \\ y(t) = k_5 \\ z(t) = -\dfrac{g_0}{2} \cdot t^2 + k_6 \end{cases}$$

et, en connaissant la position initiale d'altitude $z(0) = H$, il vient :

$$x(t) = v_0 \cdot t \ ;\ y(t) = 0 \ ;\ z(t) = -\frac{1}{2} g_0 \cdot t^2 + H.$$

3. $y(t) = 0$, donc le mouvement s'effectue dans le plan (xOz).

4. La phase descendante s'interrompt à l'instant t_d pour lequel $z(t_d) = h$.

Soit $-\dfrac{1}{2} g_0 \cdot t_d^2 + H = h$.

D'où $t_d = \sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g_0}}$.

$$t_d = \sqrt{\frac{2 \times (4{,}5 - 0{,}70)}{9{,}81}} = 0{,}88 \text{ s}$$

Exercice 04

20 **1.** On néglige l'action de l'air sur le système. D'après la deuxième loi de Newton, $m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g_0}$ d'où $\vec{a} = \vec{g_0}$.

Dans le repère orthonormé (O ; x, y),

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = a_y = -g_0 \end{cases}$$

Par intégration, on en déduit un ensemble de primitives possibles :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = -g_0 \cdot t + k_2 \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes.

La connaissance de la vitesse initiale (à $t = 0$ s) permet d'établir les valeurs de chacune des deux constantes par identification de deux termes égaux :

$$\vec{v}(0) = \vec{v_0} \text{ d'où } \begin{cases} v_x(0) = k_1 = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y(0) = -g_0 \times 0 + k_2 = v_0 \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y(t) = -g_0 \cdot t + v_0 \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

De même, puisque $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, après intégration et en connaissant la position initiale O, il vient :

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = -\dfrac{g_0}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t \end{cases}$$

2. Par substitution de la variable $t = \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$ dans l'expression de $y(t)$, on obtient l'équation de la trajectoire du ballon :

$$y(x) = \frac{-g_0}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 + x \cdot \tan\alpha$$

3. On suppose que le ballon est récupéré au niveau du sol. Le ballon touche le sol à l'instant t_f pour lequel $y(t_f) = 0$, soit $-\dfrac{g_0}{2} t_f^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_f = 0$ d'où :

$$t_f = \frac{2v_0 \cdot \sin\alpha}{g_0} \text{ soit } t_f = \frac{2 \times 10{,}0 \times \sin 60°}{9{,}8} = 1{,}8 \text{ s.}$$

Exercice 05

26 **1.** On néglige l'action de l'air sur la balle.

D'après la deuxième loi de Newton, $m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g_0}$ d'où :

$$\vec{a} = \vec{g_0} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g_0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

2. a. Dans le repère orthonormé (O ; x, y, z), puisque $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, par intégration, on en déduit un ensemble de primitives possibles :

$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = -g_0 \cdot t + k_2 \end{cases},$$

où k_1 et k_2 sont des constantes.

La connaissance de la vitesse initiale (à $t = 0$ s) permet d'établir les valeurs de chacune des deux constantes par identification des deux termes égaux : $\overrightarrow{v(0)} = \vec{v_0}$, d'où :

$$\begin{cases} v_x(0) = k_1 = v_0 \\ v_y(0) = -g_0 \times 0 + k_2 = 0 \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -g_0 \cdot t \end{cases}$

De même, puisque $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, après intégration et en connaissant la position initiale D à $t = 0$ s, les équations horaires de la position s'écrivent :

$$\overrightarrow{OG(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g_0 \cdot t^2 + H \end{cases}$$

b. La courbe **A** représente $v_x(t) = v_0$. La courbe **B** représente $y(t) = -\dfrac{1}{2} g_0 \cdot t^2 + H$ car elle est d'allure parabolique. La courbe **C** représente $x(t) = v_0 \cdot t$ car la position $x(t)$ augmente proportionnellement au temps. La courbe **D** représente $v_y(t) = -g_0 \cdot t$.

3. a. Par substitution de la variable $t = \dfrac{x}{v_0}$ dans l'expression de $y(t)$, on obtient l'équation de la trajectoire de la balle :

$$y(x) = \frac{-g_0}{2{v_0}^2} x^2 + H.$$

b. La balle passe au-dessus du filet car :

$$y(12{,}2) = \frac{-9{,}81}{2 \times \left(\dfrac{126}{3{,}6}\right)^2} \times 12{,}2^2 + 2{,}20$$
$$= 1{,}60 \text{ m} > 0{,}92 \text{ m}$$

c. On cherche l'abscisse x pour laquelle $y(x) = 0$, soit :

$y(x) = \dfrac{-g_0}{2v_0^2} x^2 + H = 0$, d'où :

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g_0}}$$

Soit $x = \dfrac{126}{3{,}6} \times \sqrt{\dfrac{2 \times 2{,}20}{9{,}81}} = 23{,}4 \text{ m} > 18{,}7 \text{ m}$.

Le service est raté.

4. a. $W_{DB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{DB} = m \cdot \vec{g} \cdot \overrightarrow{DB}$
$= m \cdot g(z_D - z_B) = m \cdot g \cdot H$

b. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$\Delta E_c = \Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_D} = W_{DB}(\vec{P})$.

Soit $\dfrac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \dfrac{1}{2} m \cdot v_0^2 = m \cdot g_0 \cdot H$, ce qui donne :

$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g_0 \cdot H}$, soit :

$v_B = 35{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 128 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

c. Le gain en vitesse est faible même si on frappe à 2,20 m de hauteur. En revanche, frapper haut la balle permet de pouvoir mieux placer la balle entre le filet et la ligne de service de l'adversaire.

Exercice 06

16 **1.** $E_m(0) = E_c(0) + E_{pp}(0) = \dfrac{1}{2} m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h$

2. a. La conservation s'applique en l'absence de force non conservative comme les forces de frottement. Ici, on peut raisonnablement négliger l'action de l'air sur le système car la boule de pétanque est dense.

b. D'après la conservation de l'énergie mécanique, $E_m(0) = E_m(F)$.

$\dfrac{1}{2} m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h = \dfrac{1}{2} m \cdot v_F^2$, d'où :

$v_F = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}$

$v_F = \sqrt{6{,}0^2 + 2 \times 9{,}81 \times 1{,}35} = 7{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.